**ЛЕКЦИЯ 10. СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ**

**ЛИТЕРАТУРА. Учебник [1] Глава 15. §15.2,15.3.**

**Постановка краевой задачи**. Найти функцию , удовлетворяющую дифференциальному уравнению второго порядка внутри отрезка  и дополнительным (граничным) условиям в концах отрезка :

****

Будем говорить, что - стационарное распределение температуры в стержне в точке

, - коэффициент теплопроводности (по физическому смыслу ),

 - коэффициент теплоотдачи (), qu- мощность стоков тепла- плотность источников тепла.

**§ 10.1 Основные теоремы о разрешимости и устойчивости задачи.**

Всюду далее будем рассматривать более простую задачу с коэффициентом :

** (10.1)**

Введем дифференциальный оператор . Тогда задача (10.1) в операторном виде запишется так:

** (10.2)**

Приведем без доказательства известные из теории дифференциальных уравнений результаты о разрешимости задачи и гладкости ее решения.

**Теорема 10.1 (существование и единственность решения)** Пусть коэффициенты , . Тогда решение краевой задачи (10.1) существует и единственно, а функция

.

**Теорема 10.2 (принцип максимума).** Пусть  - решение задачи **(10.1).** Тогда если

, , , то .

Физический смысл теоремы состоит в том, что если присутствуют источники тепла и температура торцов стержня неотрицательна, то ни в одной из внутренних точек стержня температура не может стать отрицательной.

**Теорема 10.3 (априорная оценка).** Справедлива следующая оценка решения краевой задачи

 **(10.3)**

Оценка (**10.3**) называется априорной оценкой. Она оценивает решение через входные данные задачи.

Рассмотрим вопрос об устойчивости задачи. Пусть  - решение задачи (**10.1**), а  - решение краевой задачи:

****

Здесь , ,.

**Теорема 10.4 (устойчивость задачи).** Справедлива оценка

 **(10.4)**

Доказательство теоремы вытекает из априорной оценки (**10.3)**

и линейности задачи.

Устойчивость задачи следует из **(10.4**) таким образом: если погрешности входных данных , то .

**§ 10.2 СХОДИМОСТЬ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ**

**Приведем разностную задачу для задачи (10.1) и будем ссылаться на нее**

**как на задачу (10.5).**

 **(10.5)**

**где** , 

Дискретная задача **(10.5)** получена так. Заменим вторую производную разностной аппроксимацией:

 **(10.6)**

Так как дифференциальное уравнение в задаче **(10.1**) рассматривается во внутренних точках отрезка, то в каждой точке ,  потребуем выполнения уравнения:

,  (**10.7)**

В результате дифференциальное уравнение оказалось аппроксимированным его дискретным аналогом – разностным уравнением **(10.7)**. Потребуем выполнения граничных условий

, .

Таким образом, пришли к системе линейных алгебраических уравнений, в которой число уравнений совпадает с числом неизвестных и равно N+1.

Преобразуем уравнение **(10.7)** к следующему виду:



и запишем систему более подробно:







 **(10.8)**

…..





Очевидно, что получили СЛАУ с трехдиагональной матрицей системы. Дискретную задачу **(10.8),** зависящую от параметра *h* будем называть **разностной схемой.**

Докажем теорему о разрешимости задачи (**10.8**).

**ТЕОРЕМА 10.5.** Решение разностной схемы (10.8) существует и единственно.

Доказательство: Система уравнений **(10.8)** есть частный случай разреженной системы:



с трехдиагональной матрицей. Известно, что если выполнены условия диагонального преобладания:

, , , то прогонка может быть доведена до конца.

Очевидно, для системы **(10.8)** условия диагонального преобладания выполнены.

Следовательно, можно решить систему уравнений методом прогонки и решение СЛАУ при этом – единственно.

**ТЕОРЕМА 10.6** (принцип максимума для разностной схемы)(без док-ва) . Пусть сеточная функция  является решением разностной схемы (**10.5**). Тогда если , ,, то и .

**ТЕОРЕМА 10.6 (априорная оценка решения)**. (без док-ва).Для решения разностной схемы **(10.5)** справедлива априорная оценка:

**(10.9)**

Пусть  - решение дифференциального уравнения .

**Определение.** Назовем сеточную функцию  погрешностью аппроксимации разностного уравнения

,  **(10.10)**

Подчеркнем, что сеточная функция  определяется в узлах сетки как разность между

правой и левой частью уравнения при подстановке точного решения *u* в уравнение **(10.5) .** Из определения  следует, что справедливо равенство:

, 

означающее, что функция *u* удовлетворяет разностному уравнению **(10.5)** с точностью до погрешности аппроксимации.

**Определение.** Будем говорить, что разностное уравнение **(10.5)** аппроксимирует дифференциальное уравнение  с *m*-м порядком (*m*>0), если .

**ТЕОРЕМА 10.7.** (**оценка погрешности аппроксимации**). Пусть коэффициенты *q* и *f* дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке [*a,b*]. Тогда дифференциальное уравнение аппроксимирует разностное со вторым порядком точности по *h*. При этом справедлива оценка:

,  **(10.11)**

**Доказательство**: В силу предположения о *q* и *f* функция *u(x)* имеет на отрезке [*a,b*] непрерывную производную  (см. теорему **10.1**.) В силу определения погрешности аппроксимации имеем:



где  - погрешность аппроксимации производной  ее разностным аналогом. Окончательно, 

ч.т.д.

Рассмотрим вопрос об устойчивости разностной схемы. Наряду с исходной разностной схемой рассмотрим «возмущенную задачу»:



где , , .

**Определение.** Будем называть разностную схему устойчивой, если справедлива оценка:

 **(10.12)**

**ТЕОРЕМА 10.8. (устойчивость р. с.)** Разностная схема устойчива.

Доказательство. Заметим, что сеточная функция  является решением разностной схемы:



Применим к этой задаче априорную оценку **(10.9),** тогда получим оценку **(10.12).**

ч.т.д.

Дадим базовое определение сходимости разностной схемы.

**Определение.** Будем называть погрешностью разностной схемы сеточную функцию , принимающую значения  в узлах сетки .

**Определение.** Будем говорить,что разностная схема сходится при, если

и сходится с m-м порядком точности по *h* если .

где *C* – некоторая постоянная, не зависящая от *h.*

**ТЕОРЕМА 10.9 (сходимость р.с.)** Пусть коэффициенты *q* и *f* дважды непрерывно дифференцируемы на отрезке [*a,b*]. Тогда разностная схема сходится со вторым порядком точности по *h*. При этом справедлива оценка:

 , **(10.13)**

где 

**Доказательство**. Введем сеточную функцию , значения которой в узлах сетки совпадают с точными значениями решения краевой задачи: . Тогда функция  является решением следующей задачи:

,

где , , .

В силу теоремы об устойчивости **(10.9)** справедлива оценка :



Применяя теорему об аппроксимации разностной схемы и оценку **(10.12)**, получим оценку **(10.13).**

**Оценка погрешности по правилу Рунге.** На практике чаще используются апостериорные оценки погрешности, использующие расчеты на сгущающихся сетках.

Пусть  и  - решения разностной схемы, соответствующие шагам *h* и 2*h*. Тогда в соответствии с правилом Рунге при определенных условиях справедлива приближенная формула:

 , . **(10.14)**

Формула **(10.14)** применима только в узлах сетки , то есть там, где определены обе сеточные функции  и .